

古人數家產 發明出數學

科學講堂

數學對我們有多重要，應該沒有人會懷疑，簡單如數一數我們有多少物件，就已需要利用數字。不過，數字這個概念又是怎樣在古代人類之中出現的呢？今天就和各位討論一下。

鬣狗腿骨有刻痕 估計正在記數目

先介紹一個有趣的考古發現。位於法國西部的 Les Pradelles 考古區域，早在 1930 年代就開始被發掘，當中藏有不少古代人種尼安德塔人 (Neanderthal) 使用過的物件。其中的一件頗令法國考古學家 d'Errico 好奇：那是一條 6 萬多年前的鬣狗腿骨，上面被尼安德塔人有規律地用其他工具劃上了 9 條平行的刻痕。d'Errico 用顯微鏡詳細檢查這些刻痕，發現它們的形狀、深度及其他細節都十分相似，令人相信這些刻痕是在同一個場合利用同一種石器刻劃出來的。這不禁令人猜想：為什麼要劃出這些刻痕？

這些會否是裝飾的圖案？需知我們也經常在物品上繪製不同的有規律花紋，用以修飾各種物件。為了作出比較，研究人員募集了不同的志願者，要求他們在類似的骨頭上以固定的間距刻上幾條刻痕，模仿加上裝飾圖案的情況。其後的統計分析顯示，之前提過的鬣狗腿骨上的刻痕，又不算是高度有規律，與志願者故意製造出來的圖案有明顯的分別。由此看來，那段鬣狗腿骨上的刻痕可能不是修飾的圖案。一些研究人員繼而指出，「當事人」可能正



● 古代人種尼安德塔人的複製模型。資料圖片

在記錄數目，反映出尼安德塔人在六萬多年前已在發展數目的概念。



● 不論是現代人還是古人，數字系統都很重要。

資料圖片

私人物件愈多件 數字系統愈複雜

對數量有「感覺」，自然不是人類的專利。研究指出，魚類、蜜蜂，甚至初生的小雞，都能夠分辨由 1 至 4 的數量的物件。更有一些動物能夠辨別差別較大的數量：例如牠們可以看出，放在一起的 10 件物件，與 20 件物件堆放在一起是有分別的。（我們當然不能期望動物可以指出 10 件物件與 11 件的差異。）不過現代以及其他古代人種，卻好像是將數量的概念轉化為符號、語言，再將它們融入文化之中的唯一物種。

那麼又是否有什麼環境因素，促使人類發展數量的概念呢？美國的認知考古學家 Karenleigh Overmann 曾經分析過

33 個以狩獵和採集為生的部落。她發現那些只有簡單數字系統（例如由 1 到 4）的部落居民，大都不會擁有太多私人物件；反過來說，發展出較複雜數字系統的，都是居民擁有較多物品的部落。再者，這些較複雜的數字系統，通常都是以 5、10，或是 20 為單位，應該跟手指數目有密切的關係。由此看來，可能是要「盤點」物件的需要，促使了數字系統的發展。

亦有學者從語言的角度去探究數字概念是哪時形成的。在人們相互的交流之下，有些字詞得以固定地保留下來：「水」在英文中是 water，在德文中是

wasser，兩者明顯互相關連；另外一些字詞，卻會逐漸被取代：例如「手」在英文是 hand，在西班牙文卻是十分不同的 mano，看來是當中經歷了一些較大的轉變。

研究人員發現，代表 1 至 5 的字詞，在許多語系中都甚少改變。他們甚至估計，這些字詞可能在過去 1 萬至 10 萬年之間已經穩定下來：或許當我們從 1 數到 5 的時候，古代人是可以理解我們的。

古代人是如何發展出數字概念的，看來還需要更多的探究。不過數字可能不只是對我們現代人重要：我們遠古的祖先與親戚，可能也有相同的需求呢。

● 杜子航 教育工作者

早年學習理工科目，一直致力推動科學教育與科普工作，近年開始關注電腦發展對社會的影響。

49 的倍數

奧數揭秘

這次談的問題，是關於 49 的倍數的問題，當中用上了階乘的符號，即是 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 。解題需要的基礎不多，門檻比較低，大概中一二左右就做得到。

問題：試找出所有小於 17 的正整數 n ，使得 $n! + (n+1)! + (n+2)!$ 是 49 的倍數。

答案：原式 $= n![1 + (n+1) + (n+1)(n+2)] = n!(n^2 + 4n + 4) = n!(n+2)^2$ 。
留意到 49 是 7^2 ，在 17 以內，7 的倍數有 7 和 14，即是若果 n 是 14 或以上的數，即是 14、15 和 16， $n!$ 裏都有兩個 7 的因數，可以被 49 整除。
另外，由於當 $n+2$ 是 7 的倍數時，平方後也可以有兩個 7 的倍數，也可被 49 整除。這種情況有兩個，一是 $n+2$ 是 14，或者是 7，即 n 本身是 12 或 5 的情況。
其餘情況，易由檢算得知沒可能。
因此只有 n 是 5、12、14、15 和 16，共 5 個情況。

解題的方向就是因式分解，然後知道 49 有兩個 7 的因數隱藏在其中，再找找算式中哪個因數可以藏著兩個 7。初學階乘有時會忽略了 $(n+1)! = (n+1) \times n!$ 這些簡單的關係，未看得到可以一次過提出因子。或者是知道了 $n!$ 之中，只需要有兩個 7 的因數就可以了，又忽略了 $(n+2)^2$ 也可以隱藏著兩個 7，這當中還有兩個情況，也易數漏了。

談起奧數題，有時未必有很多新知識，基礎上只要課內的數懂得通透一點，在綜合應用上做得比較好，那在競賽上也可以有不錯表現。只是競賽已經發展了很多年，有些技巧在傳統上太多人知道，好像成了一種知識，也難免有些競賽裏會把這些技巧當成是基礎。

競賽是為了評核學生對數學知識的分析和綜合能力，還有對知識的創意應用，未必是學過才懂的東西，故意有另一套課程那樣。不過，有些知識如一些餘數和整除的問題，由於傳統的數學裏已經討論過相

關的問題，也有一些常用的符號可以應用，運算起來也方便，於是就會在培訓中介紹給學生。就是不懂那些符號，有時也能夠做到其中一部分。當然，有些有用的符號未學會，運算起來就少了優勢。

初時接觸奧數或者其他競賽，看著有新符號，課內沒教過，就覺得陌生，好像有很多知識不懂。多看幾份試題後就會發現，這些符號重複的也真不少。最關鍵令人計不到答案的問題，不是有什麼知識不懂，或者什麼新符號，而是許多知識都無法有效地組織起來。

有時看到一些學生，見到新符號就怕了，就覺得挺可惜的。符號許多時只是為了簡化一些煩瑣的表達，令人運算時舒服一點。另外，奧數裏有的符號，在一些較深入的數學中，還是基本到不得了的，勉強要避開，反而令學生看不到一些更好的數學。學生怎樣克服對新符號的恐懼感，也真是在學數學的過程中好好鍛煉一番。

● 張志基

程式監察火源 指示逃生路線

綠得開心@校園

1996 年，嘉利大廈發生五級大火，造成 41 死 80 傷；12 年後旺角彌敦道嘉禾大廈亦發生五級大火，釀成 4 死 55 傷。若住客透過科技的協助，能掌握火警的位置，他們的命運會否改變？透過這一念頭和循序漸進的思考，仁濟醫院第二中學研發小組運用「綠色能源夢成真」比賽種子基金製作了「智 NET 學校火警警報系統」。

「智 NET 學校火警警報系統」主要是透過流動應用程式，讓教職員能夠馬上知道火源位置，指示學生及老師最安全的逃生路線，準確記錄火災發生的位置、日期、逃生時間。

此外，系統還設有火警演習系統，能隨機模擬不同的火源來進行火警演習，以加強學生和教職員的逃生意識。每當火警發生時，除了蜂鳴器會立即響開外，所有課室的逃生指示燈均會亮着，清晰指示最安全的逃生路線以及減低消防員尋找火源的時間。為了節省能源，系統以太陽能板作電力儲存及供電，並

且使用較為省電的 LED 指示燈。

「智 NET 學校火警警報系統」主要運用 App Inventor 設計手機應用程式，以及以 Arduino 進行編程。同學所面對的困難也不少，即使於課堂中曾學習 App Inventor，但太複雜的指令其實未能好好掌握，所以在設計作品時，複雜的編程對他們來說是最困難的。由最初未能了解指令方塊，到可以完成所有編程，同學們認為其滿足感是不能言喻的。

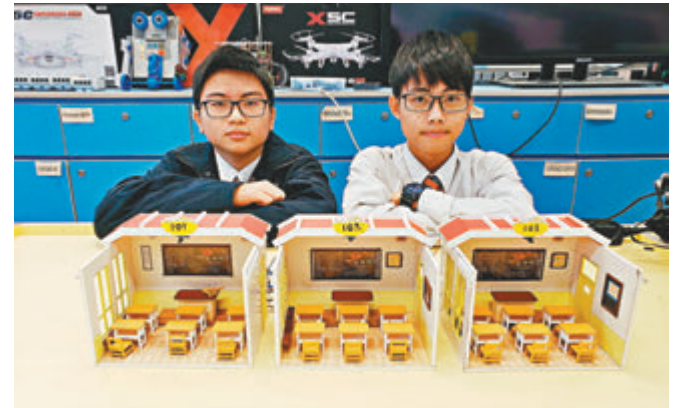
透過這次的作品製作過程，研發小組學會了分工合作的重要性，各人負責自己最擅長的領域。

此外，他們亦加深了對環保的觸覺以及對創新科技的認知。在指導老師從旁指導下，同學們學會將發明的構思變成現實。

● 仁濟醫院第二中學

（港燈「綠得開心計劃」「綠得開心學校」之一，2019「綠色能源夢成真」比賽入圍學校）

港燈綠得開心計劃，致力教導年輕一代及公眾人士培養良好的用電習慣，目前已有四百多間全港中小學校加入「綠得開心」學校網絡。如欲了解詳情，歡迎致電 3143 3727 或登入 www.hkelectric.com/happygreencampaign。



● 學生開發的流動應用程式，可指示學生及老師最安全的逃生路線。作者攝

假如這件作品能夠在生活環境中使用，同學會將現時的藍牙裝置改為 LTE，這樣覆蓋範圍會更廣。

此外，他們亦會增加煙霧感測器和火焰感測器的數量，以增強探測火源的敏感度。最後，希望發明的「智 NET 學校火警警報系統」日後能應用至各個日常環境，例如酒店、房屋、工業中心等，為所有人帶來更多生命財產保障之餘，亦能推廣環保能源的好處。



機械人大賽

香港科技园公司昨日舉辦一年一度的全港大專生機械人大賽 2021，吸引來自 7 間大專院校共 13 支隊伍參賽。賽事最終由香港中文大學的「箭無不勝」與香港科技大學的「火之龍」兩隊勝出，並列雙冠軍。

比賽主題取材自中國古代的「投壺」遊戲，即把箭投入壺中得分。每支參賽隊伍需要設計兩部機械人，分別作投箭和防守，既要求參賽隊伍作戰術部署，亦考驗各隊的工程及編程技術。賽事中表現出眾的參賽者，將有機會到設計、工程或機械人技術等領域的頂尖企業觀摩及學習。

簡介：奧校於 1995 年成立，為香港首間提供奧數培訓之註冊慈善機構（編號：91/4924），每年均舉辦「香港小學數學奧林匹克比賽」，旨在發掘在數學方面有潛質的學生。學員有機會選拔成為香港代表隊，獲免費培訓並參加海內外重要大賽。詳情可瀏覽：www.hkmos.org。

香港數學奧林匹克學校
Hong Kong Mathematical Olympiad School