水蒸氣高空凝結 微塵有助落雨

科學講堂

前陣子香港經歷了不少滂沱大雨，不知有否勾起大家的好奇心，回想雨的成因？其中一種雨水形成的原因便是水蒸氣在高空遇冷凝結，再因太重而下墜並溶化回水，就是下雨了。不過各位可能不知，下雨的機制當中還有不少我們不太理解的地方。近年有新的研究，豐富了我們對各種降雨成因的認識。今次就和大家分享一下這個故事。

凝結無雜質如蛇無頭

俗語說「蛇無頭而不行」，原來水分凝結，也需要有一個開始的起點；例如一顆水中的塵埃、容器中一個特別的地方。否則縱然溫度夠低，凝固過程還是無法開始。這有點兒像皮球立於山峰的頂端，假如周遭沒有哪一個方向特別凹了下去，那麼皮球反而會處於一個特別穩定的狀態，不會向任何方向滾下去。這種液體已經夠冷但還未有凝結的現象，稱之為「過冷」或「超冷凍」。

現實中亦有一種相類但可以說是相反的「過熱」現象：我們可以把一杯無雜質的水放進微波爐中加熱。微波爐能夠均勻地提升水分的溫度，而假如水中沒有雜質可以成為沸騰的起點，那麼這杯水就可以到達高於攝氏一百度的高溫，但卻不會沸騰。這其實是一個很危險的狀態：外表看起來這杯水十分平靜，但輕輕的晃動就可以提供一些沸騰的起點，從而驅使整杯水激烈地沸騰起來，極易燙傷附近的人。

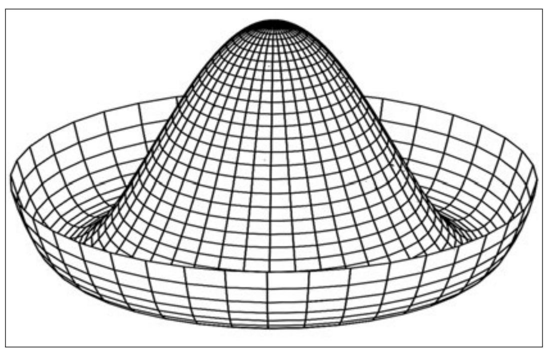
說了這麼久，這些現象和下雨有什麼關係？前面提到，水蒸氣在上升過程中形成雲，而雲中的水分可能結為冰晶。在結成冰晶前，這些水分正好就處於「超冷凍」狀態，也需要一些「特別的地方」來讓凝固開始。在高空，這些「特別的地方」通常就會是塵埃的微粒。一顆微粒應該就只可以造成一顆冰粒凝結，不過科學家們發現造成一場雨的冰粒數目遠比塵埃的數目為多！那麼這些冰粒的凝結過程，又是怎樣開始的呢？難道一顆冰粒可以誘發更多冰粒的出現？

科學家們近日利用精準的X光及可見光，在實驗中仔細觀察冰粒凝固的過程，發現原來一顆冰粒真的可以造成更多的冰粒！一顆水滴凝結成冰，通常都是從外部開始。隨着凝固慢慢進行，表層的冰塊外殼就愈來愈厚，令中間還未結成冰的部分承受愈來愈大的壓力。當壓力變得過大，冰層就會裂開並向四周噴出較小的冰粒。正是這些小冰粒驅使了更多凝固的發生，製造出更多的冰粒。

小結

下雨如此常見的現象，沒有想到原來還有許多我們不了解的地方。現在先進的科技，可以進一步加深我們的認識。我們只要留心周遭，處處都是學問呢！

◆ 水蒸氣在高空遇冷結成冰，再因太重而下墜並溶化回水，就是下雨了。 網上圖片



▲ 皮球立於山峰的頂端，不會向任何方向滾下去。 網上圖片

► 液體已經夠冷但還未有凝結的現象，稱之為「過冷」或「超冷凍」。 網上圖片

◆杜子航 教育工作者
早年學習理工科目，一直致力推動科學教育與科普工作，近年開始關注電腦發展對社會的影響。

歸納解題思路 高效破解難題

奧數揭秘

問題：求$(2+\sqrt{3})^{1997}+(2-\sqrt{3})^{1997}$除以9的餘數。

答案：考慮兩括號的二項式展開，然後發現，$\sqrt{3}$的雙數高次方，會是9的倍數，不會影響餘數。而展開後，$\sqrt{3}$的單數次方，會因為兩括號裏加減相反，展開後會互相抵消，因此只需要考慮首數項就行了。設原式為K，則

$$
\begin{aligned}
K&=2\times 2^{1997}+2\times C_2^{1997}\times 2^{1995}\times(\sqrt{3})^2 \pmod 9\\
&=2^{1998}+2^{1995}\times 3\times 1997\times 1996\\
&=8^{666}+8^{665}\times 3\times 1997\times 1996\\
&=(-1)^{666}+(-1)^{665}\times 3\times 8\times 7\\
&=1+3\\
&=4
\end{aligned}
$$

因此餘數是4。

這次談的題目，懂一些二項式定理和同餘算術會容易理解些。這些大概是高中課內數學的內容，加上一些競賽數學的技巧。

解題開始時，留意到括號的次方雖然大，但展開後由於兩個括號裏只相差加減號，容易看得出有規律。消去許多項之後又見到3的高次方是不影響除以9時的餘數，那樣就省去了許多考慮。之後用上一些同餘算術，就得出了答案。

為了說明得清楚些，也談談二項式定理的基本，大概就是好像展開$(a+b)^3$那樣，出來的結果就是$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，那些系數是有規律的。若不是3次方，還要高次方n的話，那麼a^rb^{n-r}的系數就是C_n^r，比如算式第一行裏就有$C_2^{1997}=\frac{1997\times 1996}{1\times 2}$，分子是由1997起倒數2個數相乘，分母是由1數起2個數相乘。關於二項式定理的數學表達形式應能找到網上課堂講解，這裏只是略略介紹一下。

至於同餘算術，簡單的比如1997×1996除以9的餘數，就是兩數各自取餘數之後相乘，即8×7之後再取餘數。要是那些高次方的，比如2^{1998}，取2的較高次方；比較接近9的倍數的，例如$8=2^3$，按指數律就變成了8^{666}，那樣看餘數時，把8餘以9的餘數看成−1，$(-1)^{666}=1$，於是2^{1998}除以9的餘數就是1。小學時談起除以9的餘數都是0至8的，後來懂了負數，也可以看成是0, ±1, ±2, ±3, ±4，那樣取平方時就會方便些。

這些小知識就競賽數學而言可謂淺顯易懂卻實用。上邊的題目變化起來也別有趣味。比如$2-\sqrt{3}$，其實是$\tan 15^\circ$，要是談餘數的題目裏無端出現三角函數，初時可能也會嚇一跳。至於聯想方法其實並不單一，比如通過構造圖形來找，讀者也可以多加思考嘗試不同的解題方法。

解題時找到核心思路也很快，在探索的階段不妨先由低次方開始。比如1997數字那麼大就先改小，例如3次4次之類，那樣展開式就易找了。許多項能互相抵消的想法也自然浮現出來。

至於那些同餘算術，若是本身沒什麼認識也可以在低次方的探索之中一步步嘗試找規律，然後才想去歸納出較抽象的想法來，那感覺又具體些。

解數學題，知識多的時候解法可能是簡潔精妙、比較工巧；若是找到一些角度，看出較直觀易明的思路，那樣隔些日子回想起題目來，即使一時間忘了細節怎樣也會容易有個大概的想法知道怎樣解，長遠累積起來又易些。

香港數學奧林匹克學校 Hong Kong Mathematical Olympiad School
◆ 張志基
簡介：奧校於1995年成立，為香港首間提供奧數培訓之註冊慈善機構(編號：91/4924)，每年均舉辦「香港小學數學奧林匹克比賽」，旨在發掘在數學方面有潛質的學生。學員有機會選拔成為香港代表隊，獲免費培訓並參加海內外重要大賽。詳情可瀏覽：www.hkmos.org。

AI助增訓練效能 體育水平更進步

◆ 運用相機就能捕捉運動員的姿態數據，比如速度、姿勢和角度 網上圖片

智為未來

隨着人工智能（AI）技術及相關新興科技不斷發展，科技樹的枝葉也在蓬勃生長。其中近年AI技術運用於提高運動員表現，成效斐然，多個國家與地區的職業運動隊都因而受惠。不僅如此，AI技術在提升訓練效能和比賽戰術制定等多方面，亦相較傳統方法更科學與高效。

以人體姿態估計為例，這項技術結合電腦視覺和深度學習。要實現此技術，需採集大量的影像資料。與傳統方法相比，運動員無須佩戴大量穿戴式傳感器，僅僅運用相機就能捕捉運動員的姿態數據，比如速度、姿勢和角度等。基於這些數據並利用深度學習演算法，AI技術便可估計人體姿態，為教練技術團隊提供更全面的數據作分析，讓教練可針對運動員弱點度身定制訓練計劃，提高運動員的訓練效能。

在此過程中，人體姿態估計基於大量影像資料，首先在圖片或者影片中識別人體的位置，並對人體及相對應的關節位置（例如手腕、手臂及膝蓋等）做局部標記。在模型及演算法的幫助下，教練可根據實際需求構建二維或三維人體模型。識別的效能會因不同因素而受影響，包括運動員之間的接觸、遮擋、移動速度和背景等。隨着人們對AI技術的認識加深，研究人員可以運用不同的演算法及模型區分圖像，對場景、人體和局部關節做出高效和精確的識別並整合至卷積神經網絡，生成更精準的人體姿態估計，為進一步的分析建立基礎。

運動科技領域的發展離不開新興技術的協助和對未知應用的不斷探索，AI技術將能讓運動員充分發揮潛能，同時締造更科學、專業及高效的體驗，使公眾欣賞到更高水平的體育賽事，更熱愛體育文化。

聯合主辦：香港中文大學 The Chinese University of Hong Kong 工程學院及教育學院
捐助機構：香港賽馬會慈善信託基金

◆ 中大賽馬會「智」為未來計劃 https://cuhkjc-aiforfuture.hk/
由香港賽馬會慈善信託基金捐助，香港中文大學工程學院及教育學院聯合主辦，旨在透過建構可持續的AI教育生態系統將AI帶入主流教育。通過獨有且內容全面的AI課程、創新AI學習套件、建立教師網絡並提供AI教學增值，計劃將為香港的科技教育寫下新一頁。